

Glancing upon Stochastic Analysis

نگاهی گذرا به آنالیز تصادفی

Bijan Z. Zangeneh
Sharif University of Technology

The 23rd workshop on Applied Stochastic Processes, 15/2/2022

نگاهی گذرا به آنالیز تصادفی

در این سخنرانی، با نگاهی به جایگاه احتمال و فرایند تصادفی در میان رشته های ریاضی و رشد و پیدا کردن جایگاه محکم و رفیع در بین زمینه های ریاضی، به پیدایش آنالیز تصادفی به عنوان یکی از شاخه های مطرح این زمینه می پردازیم.

تقديم به



مریم میرزاخانی

و



Caucher Birkar

آنالیز تصادفی

از دو کلمه‌ی «آنالیز» و «تصادفی» تشکیل شده‌است.
بنابراین ابتدا به مرور اینکه آنالیز واقعاً چیست می‌پردازیم.

آنالیز تصادفی

آنالیز

آنالیز با حساب دیفرانسیل و انتگرال به وسیله‌ی نیوتن و لیبنیتس به وجود آمد و مسأله‌ی اصلی مفهوم مشتق و مفهوم انتگرال است.

برای بهتر فهمیدن مسأله به معادله دیفرانسیل

$$(1) \begin{cases} \dot{X}(t) = f(t, X(t)) \\ X(0) = x \end{cases}$$

مراجعه می‌کنیم. برای اثبات وجود و یگانگی جواب آن،
آن را به صورت معادله انتگرال

$$(2) \quad X(t) = x + \int_0^t f(s, X(s)) ds$$

می‌نویسیم. وقتی صحبت از وجود جواب معادله
دیفرانسیل (۱) می‌کنیم در واقع، به دنبال جواب برای
معادله‌ی انتگرالی (۲) هستیم.

$$(1) \begin{cases} \dot{X}(t) = f(t, X(t)) \\ X(0) = x \end{cases} \quad (2) \quad X(t) = x + \int_0^t f(s, X(s)) ds$$

شاید بتوان گفت که گوییم معادله‌ی (۱) جواب دارد اگر معادله‌ی (۲) جواب داشته باشد. خیلی اوقات جواب معادله‌ی (۲) مشتق‌پذیر نیست، بنابراین در معادله‌ی (۱) صدق نمی‌کند؛ ولی می‌گوییم که جواب (۲) جواب «فرمال» معادله‌ی (۱) است. یعنی (۱) معادله‌ی خلاصه‌شده‌ی معادله‌ی (۲) است. بنابراین می‌توان معادله‌ی (۲) را به صورت خلاصه‌شده‌ی

$$dX(t) = f(t, X(t))dt$$

نوشت.

از روی همین معادله‌ی ساده شاخه‌های تنومند آنالیز رشد می‌کند و بیرون می‌آید. اگر امروز بپرسیم واقعاً آنالیز چیست و آنالیزدان چه کسی است؟

آنالیز چیست؟ آنالیزدان چه کسی است؟

با مطالعه‌ی موضوعات دروس ریاضی دانشگاه ام‌آی‌تی که با شماره‌ی ۱۸.۱ شروع می‌شوند و آنالیز نامیده می‌شوند، ملاحظه می‌کنیم که این دروس در زمینه‌های

- اندازه و انتگرال
- آنالیز حقیقی
- نظریه‌ی احتمال و فرایندهای تصادفی
- آنالیز مختلط
- آنالیز فوریه و هارمونیک
- معادلات دیفرانسیل عادی و پاره‌ای
- نظریه‌ی پتانسیل
- آنالیز تابعی و نظریه‌ی عمل‌گرها
- حساب تغییرات
- کنترل بهینه

هستند. جالب است که همه‌ی این زمینه‌ها در برنامه‌ی دکتری ریاضی مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی نیز به عنوان موضوعات آنالیز آمده‌اند. بنابراین طبیعی است که کسی را که در یکی از زمینه‌های بالا کار تحقیقاتی می‌کند، می‌توان آنالیزدان نامید. لابد اگر کسی در چندین زمینه‌ی بالا کار تحقیقاتی کند، بیش‌تر آنالیزدان است!

آنالیز تصادفی

تصادفی چیست؟

یعنی عنصری از فضای احتمال

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

یک فضای اندازه است.

Ω فضای نمونه‌ای

$\mathcal{F}$ میدان سیگمایی

$\mathbb{P}$ اندازه احتمال

احتمال و فرایندهای تصادفی

سال ۲۰۰۷ ؛

سال احتمال و فرایندهای تصادفی

«نظریهٔ احتمال در ابتدا و نیز پس از آن برای مدتی طولانی، عبارت بود از صورت آرمانی و تحلیل برخی از پدیده‌های زندگی واقعی در خارج از حیطهٔ ریاضیات. اما اندک اندک در نیمهٔ نخست این قرن احتمال ریاضی، بخشی معمولی از ریاضیات شد.»

دوب، جوزف، ترجمه عطاالله تقاء، سیرپیدایش دقت در احتمال ریاضی (۱۹۵۰ - ۱۹۰۰)، نشر ریاضی، سال ۱۲، شماره ۱ و ۲.

چگونه؟

Wendelin Werner



Wendelin Werner (born 23 September 1968) is a German-born French mathematician working on random processes such as self-avoiding random walks, Brownian motion, Schramm-Loewner evolution, and related theories in probability theory and mathematical physics. In 2006, at the 25th International Congress of Mathematicians in Madrid, Spain he received the Fields Medal "for his contributions to the development of stochastic Loewner evolution, the geometry of two-dimensional Brownian motion, and conformal field theory

Terence "Terry" Chi-Shen Tao



Terence "Terry" Chi-Shen Tao FAA FRS (simplified Chinese: 陶哲轩; traditional Chinese: 陶哲軒; pinyin: *Táo Zhéxuān*) (born 17 July 1975, Adelaide), is an Australian mathematician who has worked in various areas of mathematics. He currently focuses on harmonic analysis, partial differential equations, algebraic combinatorics, arithmetic combinatorics, geometric combinatorics, compressed sensing and analytic number theory. As of 2015, he holds the James and Carol Collins chair in mathematics at the University of California, Los Angeles. Tao was a co-recipient of the 2006 Fields Medal and the 2014 Breakthrough Prize in Mathematics

Andrei Yuryevich Okounkov



Andrei Yuryevich Okounkov (Russian: Андрей Юрьевич Окуньков, *Andrej Okun'kov*) (born July 26, 1969) is a Russian mathematician who works on representation theory and its applications to algebraic geometry, mathematical physics, probability theory and special functions. He is currently a professor at Columbia University. In 2006, he received the Fields Medal "for his contributions to bridging probability, representation theory and algebraic geometry".

Kiyosi Itô



- ▶ **Kiyosi Itô** (伊藤 清 *Itō Kiyoshi*?, September 7, 1915 - 10 November 2008) was a Japanese mathematician. He pioneered the theory of stochastic integration and stochastic differential equations, now known as the Itô calculus. Its basic concept is the Itô integral, and among the most important results is a change of variable formula known as Itô's lemma. Itô calculus is a key tool in the mathematical study of random events and is widely applied in various fields, and is perhaps best known for its use in mathematical finance. Itô also made important contribution to the study of diffusion processes on manifolds, known as stochastic differential geometry.
- ▶ Although the standard Hepburn romanization of his name is *Itô*, he used the spelling Itô (Kunrei-shiki romanization). The alternative spellings Itoh and Ito are also sometimes seen in the West

Sathamangalam Ranga Iyengar Srinivasa Varadhan



Sathamangalam Ranga Iyengar Srinivasa Varadhan FRS (born 2 January 1940) is an Indian American mathematician who is known for his fundamental contributions to probability theory and in particular for creating a unified theory of large deviations. Since 2009 he has been one of the Jury Chairs for the Infosys Prize in the discipline of Mathematical Sciences

Stanislav Konstantinovich Smirnov



Stanislav Konstantinovich Smirnov (Russian: Станислав Константи́нович Смирно́в; born 3 September 1970) is a Russian mathematician currently working at the University of Geneva, who was awarded the Fields Medal in 2010. His research focuses on the fields of complex analysis, dynamical systems and probability theory

Martin Hairer



Martin Hairer FRS (born 14 November 1975 in Geneva) is an Austrian mathematician working in the field of stochastic analysis, in particular stochastic partial differential equations. He is Regius Professor of Mathematics at the University of Warwick, having previously held a position at the Courant Institute of New York University. He was awarded the Fields Medal in 2014

Alessio Figalli



Alessio Figalli (Born 2 April 1984 (age 34) Rome, Italy)

Is an Italian mathematician working primarily on calculus of variations and PDE.

He was awarded the Prix and Cours Peccot (fr) in 2012, the EMS Prize in 2012,[1] the Stampacchia Medal in 2015,[2] the Feltrinelli Prize in 2017 and the Fields Medal in 2018. He was an invited speaker at the International Congress of Mathematicians 2014.[3] In 2016 he was awarded an ERC grant, and in 2018 he received the Fields Medal.

کلموگرف و تولد احتمال نوین



Andrei Kolmogorov (1903 - 1987)

اسنل در مصاحبه‌ای از دوب پرسیده بود:

«وقتی در دانشگاه کلمبیا می‌خواستی احتمال را یاد بگیری چگونه مطالعه می‌کردی؟ چون در آن زمان، کتاب استاندارد در نظریهٔ احتمال وجود نداشت»

SNELL, J.L., A Conversation with Joe Doob, *Statist. Sci.*, 12(4) (1997), pp. 301-311.

دوب پاسخ می‌دهد : «من از زبان غیردقیق کتاب‌ها به تنگ آمده‌بودم؛ مثلاً تفسیر قضیهٔ ارگودیک بیرکف را برای متغیرهای تصادفی ایستا برای قانون قوی اعداد بزرگ فهمیدم، قبل از این که استفاده از نامساوی چی‌بی‌شف را برای اثبات قانون ضعیف اعداد بزرگ برای دنباله دو به دو مستقل و هم توزیع از متغیرهای تصادفی ، بدانم! از طرفی کوپمن این اثبات را به من نشان داد و خودش از پیشکسوتان نظریه ارگودیک بود، به این مطلب توجه نکرده بود که قضیهٔ ارگودیک به احتمال ربط دارد. تا این که من و نوربرت وینر در یکی از نشست‌های انجمن ریاضی آمریکا این رابطه را به او گفتیم»

دوب در همین مصاحبه ابراز می‌دارد که : «تک نگاشت (۱۹۳۳)
کلموگرف در مبانی ریاضی احتمال، دقیقاً زمانی ظاهر شد که من با
استیصال سعی می‌کردم بفهمم که موضوع درباره چیست.»

دوب ادامه می‌دهد : «در ۱۹۳۴، هتلینگ در بحث کلاسی راجع به توزیع توأم نرمال تأکید کرد که همبستگی صفر دو متغیر توأم نرمال، استقلال آنها را نتیجه می‌دهد، اما هنوز دانسته نشده بود که آیا دو متغیر ناهمبسته مستقل هستند یا خیر؟ البته وقتی بعد از کلاس توضیح دادم که بازه $[0, 2\pi]$ با اندازه لبگ $\frac{1}{\pi}dx$ یک فضای احتمال است و روی این فضا توابع سینوس و کسینوس ناهمبسته هستند اما متغیرهای تصادفی مستقل نیستند، هتلینگ این مطلب را قبول کرد.»

پُل هالموس و وارن امبروس که دوب را به عنوان استاد راهنما انتخاب کرده بودند به او فشار آوردند که درسی در نظریهٔ احتمال برای آنها تدریس کند. دوب می‌گوید: «آنها آنقدر خوب بودند که می‌توانستند با مطالعهٔ خارج از کلاس، مطالب مورد نیاز را یاد بگیرند. اما حقیقتاً مطالبی برای خواندن وجود نداشت که من فکر کنم مناسب است. در آن روزها، یک درس شایسته در نظریهٔ احتمال بر اساس نظریهٔ اندازه، بایستی شامل اندازه روی فضاهای مجرد، توابع اندازه‌پذیر بُرل و قضیه رادن – نیکودیم می‌شد. وقتی بالاخره مجبور شدم که در احتمال درسی ارائه دهم، لازم بود که ابتدا آن مطالب مقدماتی را یاد می‌گرفتم و بعد جزئیات آن را شرح می‌دادم – مطالبی مانند توزیع‌های برنولی و فرمول استرلینگ ...»

MEYER, P.A., Measure Theory by J.L. Doob, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 31 (1994), pp. 233-235.

بنابراین، دوب برای اولین بار به تدریس نظریهٔ احتمال پرداخت که شاید اولین درس در نظریهٔ ریاضی احتمال بوده باشد. دوب اذعان دارد که این بدترین تدریس او بود.

دوب و انجيل نظريه مدرن احتمال



Joseph Doob (1910 - 2004)

به دوب پیشنهاد شد برای سری آمار وایلی، کتابی در فرآیندهای تصادفی بنویسد. کتاب فقط یک کتاب نبود بلکه بنیان ریاضی احتمال را به طور سیستماتیک پایه‌ریزی کرد. در این کتاب، مفاهیم جدیدی مطرح شدند که امروزه احتمال‌دانان از آن‌ها به کرات استفاده می‌کنند. به گفتهٔ دوب: «تا قبل از چاپ این کتاب و تک نگاشت کلموگرف، برای مدتی طولانی، نظریهٔ احتمال عبارت بود از صورت آرمانی و تخیلی برخی پدیده‌های زندگی واقعی در خارج از حیطهٔ ریاضیات».

DOOB, J. L., The Development of Probability in the 20th Century, (1992)

اما اندک اندک در نیمهٔ نخست این قرن، احتمال ریاضی بخشی معمولی از ریاضیات شد. «ریاضی سازی احتمال ایده‌های نو می‌طلبید و به‌ویژه نیازمند وجود رهیافت جدیدی نسبت به ایدهٔ پذیرفتنی بودن یک تابع بود»

DOOB, J. L., Stochastic Processes, John Wiley and Sons, New York, (1953).

دوب ابراز می‌دارد که «پذیرش این ریاضی‌سازی آهسته صورت گرفت و با مقاومت روبه‌رو گردید. در واقع حتی اینک برخی از احتمال‌دانان از آن بیم دارند که قالب‌بندی ریاضی احتمال، جاذبهٔ ذاتی‌اش یعنی جاذبه و افسون احتمال جهانِ واقع و جاذبهٔ دقت ریاضی را از آن ستانده‌باشد و البته حق با ایشان است. ولیکن باید تأکید کرد که بسیاری از اساسی‌ترین نتایج مبحث احتمال ریاضی از سرچشمهٔ غیر ریاضی احتمال جهانِ واقع جاری می‌شوند که هرگز حتی تعریفی نداشته است که همگان در آن متفق باشند. در حقیقت، ارتباط بین احتمالِ جهانِ واقع و احتمال ریاضی هم بلای جان و هم منبع الهامِ رشد احتمال ریاضی بوده است».

DOOB, J. L., The Development of Rigor in Mathematical Probability (1900–1950). Development of mathematics 1900–1950 pp. 157–170, (1994) .

کی لای چونگ معتقد است که «دوب مرد نظریه است نه مرد قضیه و نمی‌توان تنها چند نتیجه او را مشخص کرد و درباره دستاوردهای او صحبت نمود».

CHUNG, K.L., Probability and Doob, *Amer. Math. Monthly*, 105 (1998), no. 1, pp. 28-35.

دوب در این کتاب، به توسعه مفاهیم جداپذیری، مارتینگل (زیرمارتینگل، فوق مارتینگل)، زمان توقف، فرآیندهای تصادفی سازگار پرداخت.

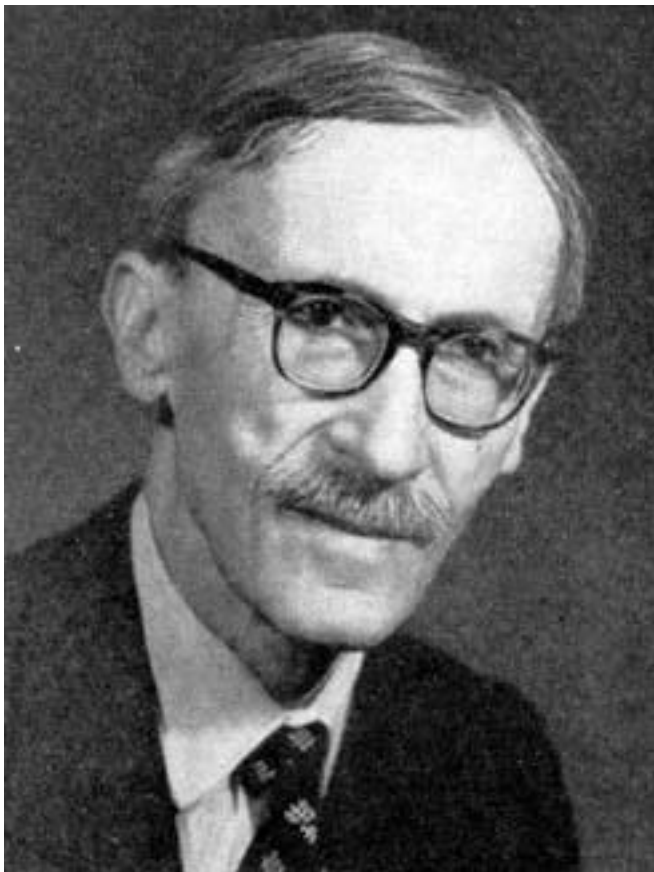
پل آندره میر بنیان‌گذار مکتب استراسبورگ در فرانسه، نویسنده کتاب احتمال و پتانسیل و یکی از ستاره‌های برجسته ریاضی فرانسه که در سال ۱۹۳۴ به دنیا آمد و در ۳۰ ژانویه ۲۰۰۳ دارفانی را وداع گفت، درباره کتاب فرآیند تصادفی دوب می گوید «این کتاب را می‌توان به عنوان نقطه عطف در معرفی نظریه احتمال با روح ریاضی مدرن در آن روز به حساب آورد». میر معتقد است که «این کتاب انجیل نظریه مدرن احتمال است»

BURKHOLDER, D. and PROTTER, P., Joseph Leo Doob (1910-2004), *Stochastic Process. Appl.*, 115 (2005), no. 7, pp. 1061-1072.

میر همچنین می‌گوید که «جو دوب و کیوشی ایتو اغلب کارهای لوی را به زبان دقیق نظریه اندازه بازنویسی کردند».

کتاب فرآیند تصادفی دوب و یا به قول آندره میر «انجیل نظریه احتمال» مرجع اصلی در نظریه فرآیندهای تصادفی و نظریه احتمال شد. پس از چاپ این کتاب، کتاب‌های بسیاری در نظریه احتمال و فرآیندهای تصادفی نوشته و چاپ شد.

پل لوی و احتمال و فرایندهای تصادفی فرانسوی



Paul Lévy (1886 - 1971)

فرایندهای لوی به نام ریاضی‌دان فرانسوی پل لوی (۱۸۸۰-۱۹۷۱)، یکی از پایه‌گذاران نظریه فرایندهای تصادفی، نام‌گذاری شده‌اند. لوی کشفیات بسیار مهم و اساسی در زمینه متغیرها و فرایندهای تصادفی گاوسی، قوانین اعداد بزرگ، قضیه حد مرکزی، توزیع‌های احتمال پایدار، و توزیع‌های تقسیم پذیر نامتناهی انجام داد، و آغازگر مطالعه فرایندهای دارای نموهای مستقل و غیر همبسته بود، که امروزه به نام او به «فرایندهای لوی» معروف هستند (فیزیک‌دانان انواع پایدار این فرایندها را با نام «پروازهای لوی» می‌شناسند). کتابی که او در این زمینه نگاشت الهام‌بخش بسیاری از محققین در نظریه احتمال بوده است.

LÉVY, P., Théorie de l'Addition des Variable Al'eatoire, Gauthier Villards, Paris, (1937).

او پیش‌تاز مطالعهٔ ویژگی‌های مسیرهای براونی است، و برای اولین بار مفهوم «زمان موضعی» را معرفی کرد. این مطالعات منجر به کتاب کلاسیک او در زمینهٔ فرایندهای تصادفی و حرکت براونی گردید.

LÉVY, P., Quelques Aspects de la Pensée d'un Mathématicien, Paris, (1970).

بنا به گفتهٔ تیلور «در آن زمان هنوز نظریهٔ ریاضی احتمال وجود نداشت، و شاخهٔ احتمالات در ریاضیات تنها مجموعه‌ای از مسائل کوچک محاسباتی بود. در حال حاضر نظریهٔ احتمال یک شاخهٔ تکامل یافته ریاضیات است؛ از روش‌های همهٔ شاخه‌های آنالیز نوین بهره می‌برد، و به نوبهٔ خود ابزار مؤثر و ایده‌ها و مسائل جالبی را در اختیار شاخه‌های دیگر علوم قرار می‌دهد. اگر بخواهیم تنها از یک شخص به عنوان بیشترین تأثیرگذار بر استحکام و توسعهٔ نظریهٔ احتمال نام ببریم، آن شخص باید پل لوی باشد».

TAYLOR, S., Paul Lévy, *Bull. London Math. Soc.*, 7(1975), pp. 300-320.

لوئو تنها دانشجوی پل لوی توصیف زنده و روشنی از سهم لوی در نظریهٔ احتمال نوین ارائه می دهد: «پل لوی مانند یک نقاش در دنیای احتمالات بود. مانند نوابغ بزرگ نقاشی، رنگ آمیزی‌های او ابتکار شخصی بود و تابلوهای او نگرش ما را نسبت به واقعیت برای همیشه متحول ساخت. مطالعات او از نظر زمانی به سه دورهٔ اصلی تقسیم می‌شوند: دورهٔ قوانین حدی احتمال، دورهٔ بزرگ فرایندهای جمع و مارتینگل‌ها و «نقاشی شده با رنگ آمیزی‌های مسیر زمانی»، و دورهٔ مسیریابی براونی».

LOÈVE, M., Paul Lévy, 1886-1971, *Ann. Probability*, 1(1971), pp. 1-18.

گرچه لوی معاصر با کلموگروف بود، اما روش اصول‌گرای کلموگروف را اتخاذ نکرد. دوب دربارهٔ لوی می‌نویسد: «پل لوی مقید به آداب و رسوم نیست. روش متداول او در رویارویی با ریاضیات تعریف متغیرهای تصادفی یکی پس از دیگری است، به جای آن که با یک فضای اندازه و خانوادهٔ توابع اندازه‌پذیر روی آن با تعدادی ویژگی درگیر باشد. لوی خود را درگیر تفاوت‌های جزئی رسمی بین ویژگی‌های مارکف و ویژگی‌های مارکف قوی نمی‌سازد. او این ایده را که اصل انتخاب اصل جداگانه‌ای است که می‌توان آن را نپذیرفت، رد می‌کند. او همواره مسیر مستقلی را در تفکراتش پیموده است؛ شاید به این دلیل که دنباله‌روی از دیگران برایش مشکل و دردآور بوده است».

CONT, R. and TANKOV P., Financial Modeling with Jump Processes,
Chapman and Hall/CRC, (2004).

ایتو می گوید : «در آن زمان اعتقاد عموم بر این بود که درک کارهای لوی خیلی مشکل است زیرا لوی که خود از پیشگامان نظریه‌ی احتمال بود، احتمال را بر مبنای شهود خودش توضیح می داد. من تلاش کردم ایده‌های لوی را با استفاده از منطق دقیقی که کلموگروف به کار می گرفت شرح دهم و در این مسیر توانستم به کمک مفهوم منظم سازی که دوب معرفی کرده بود، و پس از تلاش‌های طولانی مفهوم معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی را ابداع کنم و به این ترتیب اولین مقاله‌ام را منتشر نمودم. ولی امروزه به کار گیری روش‌های ابداعی من در تشریح نظریه‌ی لوی امری عادی در بین ریاضیدانان شده است.»

جهانی پور، روح الله، نیوتن و لایبنیتس، سپس کیوشی ایتو،
فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۳۶، بهار ۱۳۸۵، ۶۱-۶۶.

فلر و بال شهودی و تحلیلی احتمال



William Feller (1906 - 1970)

کتاب دوب ، کتاب فلر

در همان زمانی که سری آمار وایلی به دوب پیشنهاد نوشتن کتابی در
فرآیندهای تصادفی داد به فلر پیشنهاد نوشتن کتابی در احتمال داد.

فلر استاد نوشتن به زبان ساده است.

یکی از سخنرانی های جاودانه فلر ، سخنرانی عمومی او در سال ۱۹۵۰ در کنگره بین المللی ریاضیدانان در کمبریج ماساچوست است ، که درباره اصلی ترین کار تحقیقاتیش در پرینستون یعنی فرایندهای پخش (نفوذ) صحبت کرده بود. فلر بعد از کلموگرف به مطالعه تحلیلی فرآیندهای مارکف پرداخته است. او توانست توزیع های احتمال فرآیندهای مارکف را به جواب های معادلات دیفرانسیل پاره ای مربوط سازد ، در واقع آنالیز نیم گروه ها و مولدهای بی نهایت کوچک آن ها و معادلات دیفرانسیل پاره ای ونیم گروه فلریکی از کارهای با ارزش او در راستای تولد انتگرال تصادفی است.

Full Mac Tutor Biography.

[www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/biographies/Feller.html](http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/biographies/Feller.html)

حرکت براونی



کوشش‌های اولیه برای ارائه الگوی ریاضی حرکت براونی از سه منبع مختلف سرچشمه می‌گیرد که هیچ کدام ارتباطی با دیگری نداشته است:

◀ اولی کارتیله در کپنهاگ در سال ۱۸۸۰ بود که هنگام مطالعه سری‌های زمانی، الگوی هوشمندانه‌ای برای حرکت براونی ابداع کرد.

THIELE, T. N., Sur la compensation de quelques erreurs quasisystématiques par la méthode des moindres carrés, (1880).

◀ دومی به کارهای ل. بشیلیه در پاریس مربوط می شود که هنگام مطالعه رفتارپویای بازار بورس پاریس در سال ۱۹۰۰، الگویی برای حرکت براونی ارائه داد.

BACHELIER, L., *Théorie de la Spéculation*, Gauthier-Villars, Paris, (1900).

◀ بالأخره منبع سوم، الگویی بود که آلبرت اینشتین در سال ۱۹۰۵ برای حرکت ذرات ریز معلق در یک مایع ارائه کرد تا فیزیکدانان دیگر را درباره ماهیت مولکولی ماده، متقاعد سازد.

PAIS, A., 'Subtle is the Lord...' The Science and Life of Albert Einstein, Oxford University Press, (1982).

از این سه الگو، الگوهای تیل و بشیلیه در طولانی مدت بروز چندانی نداشتند، لکن الگوی اینشتین تأثیر خود را بلافاصله نشان داد.

بشلیه ، بنیان‌گذار ریاضیات مالی



Louis Bachelier (1870 - 1946)

از آنجا که بسیاری، بشیلیه را بنیان‌گذار ریاضیات مالی می‌دانند، آنچه را
بر او گذشت قدری مبسوط‌تر بیان می‌کنیم: بشیلیه، پس از کارتيله (که در
زمان خودش مورد اقبال چندانی واقع نشد) و پیش از کار اینشتین، تلاش
کرد تا نوفه‌های بازار بورس پاریس را الگوسازی کند. او در این راه، با الهام
از ایده‌های مربوط به قضیه حد مرکزی و درک این مطلب که نوفه‌های
بازار می‌بایست بی‌حافظه باشند، استدلال کرد که نمو‌های قیمت‌های کالاها
باید مستقل و دارای توزیع نرمال باشند.

بشلیه استدلال خویش را با ویژگی‌های مارکفی و نیم‌گروهی درهم آمیخت و با استفاده از این‌که هستهٔ گاوسی، جواب اساسی معادلهٔ حرارت است، حرکت براونی را به معادلهٔ حرارت مرتبط ساخت. او همچنین توانست سایر فرآیندهای مرتبط با حرکت براونی را نیز تعریف کند، برای مثال فرآیند ماکسیمم تغییرات در یک بازهٔ زمانی برای حرکت براونی یک‌بعدی را با استفاده از قدم‌زدن تصادفی و کوچک ساختن طول قدم‌ها با عمل حدگیری به سمت صفر، تعریف کرد.

رساله دکتری او مورد تمجید فراوان استاد مشاورش هانری پوانکاره قرار گرفت، لکن عمدتاً به خاطر بی میلی که در آن زمان نسبت به مطالعه اقتصاد به عنوان بخشی از کاربردهای ریاضی وجود داشت، نتوانست به جمع نخبگان ریاضی پاریس بپیوندد و باقی عمر خویش را بسیار دور از پاریس در روستایی در مرکز بیزانسن در شرق فرانسه، نزدیک سوئیس، گذراند.

COURTAULT, J. M. et al, Louis Bachelier: On the Centenary of Théorie de la Spéculation, *Mathematical Finance*, 10, (2000), pp. 341-353.

الگوی انیشتین

به زبان امروزی، اینشتین حرکت براونی را فرآیندی تصادفی معرفی کرده بود که مسیرهای پیوسته و نموهای مستقل با توزیع گاوسی مانا دارد.

نوربرت وینر ریاضیدان برجسته و نابغه قرن بیستم، در سال ۱۹۱۸ الگوی ریاضی این حرکت را به طور کامل بررسی کرد: «توجه کنید که شکی در وجود حرکت براونی نیست: حرکت براونی را می‌شود زیر میکروسکوپ نظاره کرد، ولی هنوز برهانی برای وجود یک فرآیند تصادفی، یک حساب ریاضی، با خواص مطلوب در دست نبود. وینر در سال ۱۹۲۳ فرآیند مطلوب حرکت براونی را که امروزه معمولاً فرآیند وینر نامیده می‌شود به دست آورد. بدین منظور، وی از رهیافت دانیل به نظریه اندازه استفاده کرد تا اندازه‌ای با خواص ذیل، برفضای S از توابع پیوسته به دست آورد: اگر $x(t, \cdot)$ متغیری تصادفی باشد که با مقدار یک تابع در S در زمان t تعریف شده باشد، فرآیند تصادفی این متغیرهای تصادفی، فرآیندی است با اعضای S به عنوان توابع نمونه‌ای، و با توزیع‌های توأمی که برای فرآیند حرکت براونی داشتیم به عنوان توزیع‌های توأم متغیر تصادفی».

وینر توانست در سال ۱۹۲۳ به کمک این رویکرد همراه با سری‌های فوریه، حرکت براونی را بسازد و دیدگاه فیزیکی اینشتین را جامهٔ ریاضی بپوشاند. وینر و دیگران، بسیاری از ویژگی‌های مسیرهای حرکت براونی را ثابت کردند که این کار، تا به امروز نیز ادامه یافته است. دو ویژگی کلیدی حرکت براونی عبارتند از:

- (۱) مسیرهای حرکت براونی، تغییرات مرتبه دوم کراندار ناصفر دارند طوری که روی بازهٔ (s, t) مقدار تغییرات مرتبه دوم برابر است با $t - s$ ،
- (۲) مسیرهای حرکت براونی، قریب به یقین روی بازه‌های زمانی فشرده، تغییرات بی‌کران دارند. البته ویژگی دوم به سادگی از اولی به دست می‌آید.

توجه کنید که اگر اینشتین فرض کرده بود که مسیرها طول‌پذیرند، آنگاه اثبات وینر نشان می‌داد که وجود چنین الگویی غیرممکن است. معمولاً به خاطر ارج نهادن به کار وینر، حرکت براونی را فرآیند وینر نیز می‌نامند. وینر، یک انتگرال چندگانه نیز ساخت اما این موضوع ارتباطی به آنچه امروزه «انتگرال چندگانه وینر» می‌نامیم ندارد، در واقع در سال ۱۹۵۱ ک. ایتو ضمن تلاش برای درک مقالات وینر که کارچندان ساده‌ای هم نبود، اندیشه‌های وینر را منظم کرد و اصلاحات زیادی در آن‌ها انجام داد

قدم بعدی را در آماده‌سازی بستر تعریف برای انتگرال تصادفی، آ. ن. کلموگرف برداشت. نظریه انتگرال تصادفی از دیدگاه غیر مالی، از همان روزهای نخست شکل‌گیری، با نظریه فرآیندهای مارکف درهم آمیخت که البته در این جریان، کلموگرف نقشی اساسی بازی کرد. در واقع، کلموگرف در سال ۱۹۳۱، درست دو سال پیش از آن که در کتاب مشهورش مبانی ریاضی نظریه احتمال را با استفاده از نظریه اندازه پایه‌گذاری کند، اشاراتی مختصر به روش بشیلیه در ساختن حرکت براونی داشته است.

در همین مقاله بخش زیادی از نظریه‌اش را در باب فرآیندهای مارکف ارائه داده است. به خصوص در همین مقاله، نشان داد که فرآیندهای مارکف پیوسته (فرآیندهای نفوذ) اساساً فقط به دو پارامتر بستگی دارند، یکی سرعت پیشروی و دیگری اندازه بخش تصادفی خالص (مؤلفه نفوذی). سپس توانست توزیع‌های احتمال فرآیند را به جواب‌های معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مربوط سازد و آن معادلات را حل کند که امروزه آن‌ها را «معادلات کلموگرف» می‌نامیم. البته کلموگرف به نظریه انتگرال ایتو دسترسی نداشت و از این رو، مبنای کار خود را آنالیز نیم‌گروه‌ها و مولدهای بی‌نهایت کوچک آن‌ها و معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاصل، قرار داد.

داستان دوبلین

پس از کلموگرف، به سراغ داستان جالب و غم‌انگیز وینسنت دوبلین (با نام اصلی ولفگانگ دوبلین) می‌رویم که پسر نویسنده مشهور، آلفرد دوبلین، بود. خانواده دوبلین به خاطر فرار از نازی‌های آلمان، ابتدا به سوئیس و سپس به پاریس گریختند. ولفگانگ، به وینسنت دوبلین تغییر نام داد و شهروند فرانسوی شد. دوران دبیرستان خود را در فرانسه به پایان رساند و دیری نپایید که هوش سرشار ریاضی او آشکار گشت. در اواخر دهه ۱۹۲۰، نظریه احتمال در میان ریاضی‌دانان به خصوص در دو مرکزیت مسکو و پاریس، در حال شکل‌گیری بود. دوبلین به احتمال‌دانان پیوست و به کار بر روی زنجیرهای مارکف و سپس فرآیندهای مارکف مشغول شد. دوب در کتاب خود

DOOB, J. L., The Development of Rigor in Mathematical Probability (1900-1950), (1996).

اشارات فراوانی به کارهای زیربنایی دوبلین روی زنجیرهای مارکف و فرآیندهای مارکف دارد.

ایتو و آنالیز قرن بیست و یکم



Kiyosi Itô (1915 -)

جایزه گوس

اولین جایزه تازه تاسیس گاوس به کیوشی ایتوی ۹۰ ساله اهدا شد.

آنالیز تصادفی؛ آنالیز قرن بیستم

معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(t, X(t)) \\ X(0) = x \end{cases}$$

حال این معادله در محیط تصادفی قرار می‌گیرد:

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t)) + g(t, X(t))"W(t)"$$

آن را به صورت معادله‌ی انتگرال می‌نویسیم:

$$X(t) = x + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s)$$

انتگرال دوم را به صورت

$$\int_0^t g(s, X(s))dW(s)$$

می‌نویسیم. می‌توان انتگرال تصادفی را به صورت

$$X(t) = \int_0^t a(s, \omega)ds + \int_0^t b(s, \omega)dW(s)$$

نوشت.

یا به صورت فرم دیفرانسیلی به صورت

$$dX(t) = a(t, \omega)dt + b(t, \omega)dW(t).$$

هدف انتگرال تصادفی ایتو، تعریف انتگرال بالاست.

در آنالیز کلاسیک که

$$X(t) = \int_0^t a(s, \omega) ds$$

است. اگر

$$Y(t) = f(t, X(t))$$

باشد

$$dY(t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX(t)$$

می باشد.

در آنالیز تصادفی اگر

$$X(t) = \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t b(s, \omega) dW(s)$$

یا به فرم دیفرانسیلی

$$dX(t) = a(t, \omega) dt + b(t, \omega) dW(t)$$

باشد. آن گاه اگر

$$Y(t) = f(t, X(t))$$

باشد. آن گاه

$$dY(t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot (dX(t))^2$$

می باشد.

که در این جا

$$(dX(t))^2 = b^2(t, \omega)dt$$

می گردد.

.	dt	$dW(t)$
dt	0	0
$dW(t)$	0	dt

معادلات دیفرانسیل تصادفی

اکنون باز می گردیم به حل معادله دیفرانسیل تصادفی

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t, \quad (1)$$

که $b(t, X_t)$ و $\sigma(t, X_t)$ توابعی حقیقی هستند و W_t یک « نوفه سفید » یک بعدی است.

این معادله را می توان به شکل معادله انتگرال $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$

نوشت. پرسشهای طبیعی که مطرح می شوند عبارتند از:

(۱) آیا می توان وجود و یکتائی جواب را برای ۱ ثابت کرد؟

(۲) چگونه می توان این معادله را حل کرد؟

ابتدا با نگاهی به یک مثال ساده به سؤال ۲ پاسخ می دهیم. فرمول ایتو کلید حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل تصادفی است.

مثال ۶ به مدل رشد جمعیت باز می گردیم. دیدیم که معادله دیفرانسیل مربوط به این مدل عبارت است از

$$\frac{dN_t}{dt} = a_t \cdot N_t$$

که N_0 داده شده است و $a_t = r_t + \alpha W_t$ ، و α عددی است ثابت. فرض می کنیم $r_t = r$ = ثابت.

این معادله را می توان به شکل معادل

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t$$

یا

$$\frac{dN_t}{N_t} = rdt + \alpha dB_t$$

نوشت. از اینرو داریم

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = rt + \alpha B_t, \quad (B_0 = 0), \quad (2).$$

برای محاسبه انتگرال سمت چپ از فرمول ایتو استفاده می کنیم. قرار می دهیم $g(t, x) = \ln x$ و بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} d(\ln(N_t)) &= \frac{1}{N_t} dN_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{N_t^2}\right) (dN_t)^2 \\ &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2} \alpha^2 (N_t)^2 dt \\ &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2} \alpha^2 dt. \end{aligned}$$

بنا براین

$$\frac{dN_t}{N_t} = d(\ln N_t) + \frac{1}{2}\alpha^2 dt$$

لذا از (۲) نتیجه می گیریم که

$$\ln \frac{N_t}{N_0} = (r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t$$

یا

$$N_t = N_0 \exp((r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t).$$

حال اگر B_t مستقل از N_0 باشد، آنگاه

$$E(N_t) = E(N_0)e^{rt}$$

یعنی مانند حالتی که در a_t نوفه وجود ندارد. برای اینکه ببینیم چرا این مطلب درست است،

فرض می کنیم

$$Y_t = e^{\alpha B_t}$$

و فرمول ایتورا به کار می بریم:

$$dY_t = \alpha e^{\alpha B_t} dB_t + \frac{1}{\gamma} \alpha^2 e^{\alpha B_t} dt$$

یا به صورت انتگرالی

$$Y_t = Y_0 + \alpha \int_0^t e^{\alpha B_s} dB_s + \frac{1}{\gamma} \alpha^2 \int_0^t e^{\alpha B_s} ds$$

حال از دو طرف امید می گیریم و با توجه به اینکه $E(\int_0^t e^{\alpha B_s} dB_s) = 0$ خواهیم داشت

$$E(Y_t) = E(Y_0) + \frac{1}{\gamma} \alpha^2 \int_0^t E(Y_s) ds$$

یعنی $f(t) = E(Y_t)$ در معادله دیفرانسیل

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{\gamma} \alpha^2 f(t), \quad f(0) = 1$$

صدق می کند که جواب آن عبارت است از

$$E(Y_t) = e^{\frac{1}{\gamma} \alpha^2 t}$$

لذا

$$\begin{aligned} E(N_t) &= E[(N_0) \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t) e^{\alpha B_t}] \\ &= \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t) E(N_0) E(e^{\alpha B_t}) \\ &= E(N_0) e^{rt}. \end{aligned}$$

حال برای بحث کیفی روی جوابهای این معادله توجه می کنیم که

(۱) اگر $r > \frac{1}{2}\sigma^2$ آنگاه $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \infty$.

(۲) اگر $r < \frac{1}{2}\sigma^2$ آنگاه $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = 0$.

(۳) اگر $r = \frac{1}{\alpha^2}$ آنگاه $N_t = N_0 e^{\alpha B_t}$ از طرفی طبق قانون لگاریتم مکرر

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1, \quad a.s.$$

لذا

$$N_t \sim N_0 \exp\left(\pm \sqrt{2t \log \log t}\right).$$

یعنی اگر $t \rightarrow \infty$ بین مقادیر 0 و $+\infty$ نوسان میکند.

حال پس از این مثال مقدماتی می پردازیم به بررسی وجود و یگانگی جواب برای معادلات دیفرانسیل تصادفی که به صورت زیر بیان می شود.

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

$$X_0 = Z, \quad 0 \leq t \leq T.$$

قضیه ۱۰ (وجود یگانگی) گیریم $T > 0$ و

$$b(.,.) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\sigma(.,.) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$$

توابع اندازه پذیری باشند که به ازاء ثابتی مانند $c > 0$

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq c(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (۱)$$

($|\sigma|^2 = \sum_{i,j} |\sigma|_{i,j}^2$) و به ازاء ثابتی دیگر مانند $D > 0$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y| \quad (۲)$$

برای $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $t \in [0, T]$. همچنین فرض کنید Z متغیری تصادفی و مستقل از میدان
سیگمائی $\mathcal{F}_\infty$ (تولید شده توسط $B_s(\cdot)$, $s \geq 0$) باشد به طوری که

$$E(|Z|^2) < +\infty \quad (3)$$

آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

$$X_0 = Z, 0 \leq t \leq T$$

دارای جواب t -پیوستهٔ یگانه‌ای مانند $X_t(\omega)$ است که هر کدام از مولفه های X_t متعلق به $\mathcal{P}_2$
روی $[0, T]$ است.

آنالیز تصادفی روی فضای باناخ یا آنالیز تصادفی تابعی

- انتگرال تصادفی روی فضای هیلبرت
- فرمول ایتو
- معادلات دیفرانسیل پاره‌ای تصادفی
- معادلات تطوری تصادفی روی فضای هیلبرت به روش نیم‌گروه‌ها
- معادلات تطوری تصادفی روی فضای سه‌تایی گلفاند به روش تغییراتی

آنالیز تصادفی روی منیفلد ریمانی

• فرم‌های تصادفی

آنالیز تصادفی مختلط

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای تصادفی

آنالیز تصادفی و نظریه‌ی پتانسیل

:Doob

- نظریه‌ی پتانسیل دترمینستیک
- نظریه‌ی پتانسیل تصادفی
- و رابطه‌ی آن‌ها

آنالیز عددی تصادفی

- حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی
- حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای تصادفی
- روش‌های مونت کارلو برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

رياضيات مالی

معادلات دیفرانسیل تصادفی

کنترل بهینه‌ی تصادفی

ارتعاشات تصادفی

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای تصادفی

•
•
•

و ورود به دنیای تصادفی

باتشکر از توجه شما